

Abstract 3.2.: duality, fuzziness and mitigation

Mathematical duality is linking procedures which lead to same result. Fuzziness is the result of unequeness get by synonymous methods. Mitigation on the other hand is a solution for risk management, for example by reinsurance, which here is a proposal for valuation in rating and/or evaluation practice.

Today rating as an information compensation gets more transparency and objectivity requirements by supervision of financial instituts and what makes obviously that too evaluation as an per se outer view of inspection needs technics to objectivate valuation results.

3.2 Dualität, Unschärfe und Mitigation

Max Weber¹ ... "hat das (selbst normative) Postulat aufgestellt, der redliche Wissenschaftler solle strikt trennen zwischen Tatsachenaussagen, die 'wahrheitsfähig' sind, und Wertungen, die dies nicht sind; er solle letztere klar als solche kennzeichnen und die Maßstäbe offenlegen, aus denen er sie gewinnt. Zugleich hat Weber aber betont, dass

(1.) die Wissenschaft selbst - als soziale Praxis - nicht ohne Wertungen auskomme - etwa wenn es darum gehe, die Ziele der Erkenntnisbemühungen selbst festzulegen -, und dass

(2.) eine rationale Diskussion und Argumentation über Wertfragen möglich sei und sich gerade auch Wissenschaftler an ihr beteiligen sollten.

"Bei **Zwei-Personen-Nullsummenspielen** wird besonders deutlich, dass der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust des anderen Spielers ist. Das heißt, es muss sich dieselbe Lösung ergeben, wenn man den Mindestgewinn des Spielers A maximiert oder den Maximalverlust des Spielers B minimiert"²

Dem entgegen gibt es verschiedene Herangehensweisen an mathematische Lösungsprobleme, die aber nicht im Sinne des mathematischen Dualitätsbegriffes auch zur identischen Lösung führen und somit Unschärfeprobleme in der Erkenntnisgewinnung hervorrufen, sofern sie als Lösungsansätze gleichwertig sind. Als ein zentrales Beispiel sei die für die Erfassung von Kausalitäten häufig verwendete Korrelation angeführt. Mit den Dokumenten Manual.pdf und RegioSkalen.pdf der Begleit-CD sowie auch des Internet-Auftritts <http://www.rankingweb.de> sind weitere Beispiele gegeben. Die Zusammenhänge der Unschärfe von Korrelationsbetrachtungen sind besonders auch mit der Datei InfoMatrix.xls spielerisch verdeutlicht.

¹ Vgl. C.Schubert: "Die rechtliche Steuerung urbanen Wandels", Mohr Siebeck 2006, 42f

² Vgl. W.König et.al: "Taschenbuch der Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik", Verlag Harri Deutsch 2003, 418.

• Korrelation³

Zur Beurteilung sachlicher insbesondere linearer (regressiver⁴) Zusammenhänge zwischen Kennzahlen bzw. Merkmalen werden überwiegend Korrelationen herangezogen. Der Pearsonsche Korrelationskoeffizient als Maß der Güte eines Zusammenhanges wird auch Produktmomentenkorrelation genannt, womit wesentliche Kritikpunkte bezüglich der mit der genannten Korrelation gemessenen Zusammenhänge schon deutlich werden.

Die Momenten-Methode ist eine von speziellen Verteilungen stark vereinfachende Methode der Erkenntnisgewinnung und zum anderen ist das Produkt als Aggregator von Teilinformationen ein stark Masse konzentrierender Aggregator.

Bezüglich zweier Zufallsvariablen X, Y wird die sogenannte Pearsonsche Korrelation P wie folgt berechnet:

$$P_{X,Y} = \frac{\sum_{x \in X} \left(x - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x \right) \sum_{y \in Y} \left(y - \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} y \right)}{\sqrt{\sum_{x \in X} \left(x - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x \right)^2} \sqrt{\sum_{y \in Y} \left(y - \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} y \right)^2}}$$

P ist dann, wie man leicht nachprüft, invariant bezüglich multiplikativer Veränderungen von X und Y (Skalenparameter) wie auch gegenüber der Addition von Konstanten (Lageparameter). Erheblichen Einfluß nimmt hingegen die Verteilung der Kennzahlenausprägungen, wie der Vergleich zur Rangkorrelation⁵ im Sinne Kendall's τ , das sich als folgende Differenz von Wahrscheinlichkeiten ermitteln lässt deutlich macht:

Seien (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) zwei unabhängig und identisch verteilte Zufallsvektoren, dann ist

$$\tau_{X,Y} := \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

und es gelten die Beziehungen

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq P \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \tau \geq 0$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq P \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \tau \leq 0$$

sowie

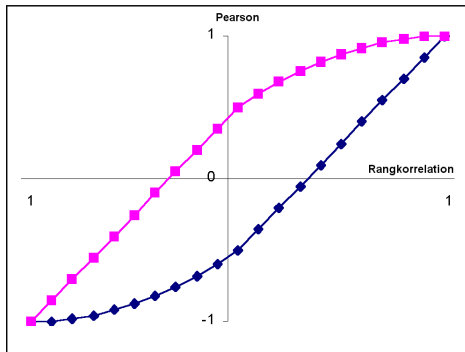
$$-1 \leq 3\tau - 2P \leq 1$$

³ Vgl. auch R.Holz: "Regionen-Ranking 2003", Shaker 2004, 129f sowie <http://www.rankingweb.de/Manual.pdf>

⁴ Mit <http://www.wikipedia.de> bedeutet das Wort "Regression .. Rückgang, Rückführung oder Rückschritt"

⁵ Vgl. R.B.Nelsen: An Introduction to Copulas, Lecture Notes in Statistics 139, Springer 1999 und für konkrete Beispiele anhand einer Analyse zu regionalen Unterschieden der Sterblichkeit die Datei qx_regional.pdf der Seite <http://www.rankingweb.de/Todesursachen.html>

Womit die beiden Korrelationsmaße aus einer überwiegender Orientierung einerseits an der Anzahl der Datenpaare und deren Ordnung und andererseits an der Lage der Datenpaare in Bezug auf die nicht notwendig zentralen Mittelpunkte der Wertemengen X und Y im direkten Vergleich Unterschiedsbeträge bis zu 0,5 hervorrufen können und was sich auch einsehen lässt, wenn man die sogenannte Idempotenz von Operatoren $D(a,a)=a$ als Messlatte für die verzerrende Wirkung der Multiplikation gegenüber der kardinalen Werte a heranzieht die (für beide Eingangswerte) in $a=0,5$ die Wertigkeit auf $a*a = 0,25$ im Maximum reduziert.



Vergleichen wir P mit der im Zusammenhang mit Clusterungen betrachteten beispielsweise Euklid-Norm, so tritt im Zähler von P an die Stelle der Addition von Abständen verschiedener Teilräume die Multiplikation dieser. Die Korrelation P ist dann bezüglich des Produktes der Standardabweichungen normiert und summiert im Zähler die multiplizierten gezählten Abstände von den nicht notwendig zentralen Durchschnitten der betrachteten Kennzahlen.

Die Multiplikation der Abstände im Vergleich zur Addition der Abstände in den Normen hat dann zwar den Effekt, dass sich einseitig gemessene geringe Abstände im Ergebnis zugunsten geringer Korrelationen auswirken. Andererseits werden aber nahe an den Mittelpunkten liegende betragsmäßig übereinstimmende Abstände im Vergleich zu entfernt liegenden betragsmäßig übereinstimmenden Abständen stark unterbewertet, womit Korrelationen fast ausschließlich von den entfernt liegenden Werten bestimmt sind, die die Anzahl der Beobachtungspunkte in ihrer Bedeutung unwesentlicher werden lassen.

Beispiel: Faltungen und Tests

Der aufgezeigte Zusammenhang sowie insbesondere auch das Problem der impliziten Gewichte⁶ hat beispielsweise auch Einfluß auf Testniveaus. Die Normalverteilung erlaubt die Herstellung eines Zusammenhanges zwischen der Streuung und Quantilen der Verteilung:

Ist $X \sim N(m; \sigma^2)$, dann gilt⁷:

⁶ Vgl etwa den Anhang in R. Holz: "Großstädte-Ranking 2001", Shaker-Verlag 2002 oder die Ausführungen in <http://www.rankingweb.de/Manual.pdf>

$$IP(|X-m|<\sigma) \approx 0,683 \quad \text{und} \quad IP(|X-m|<2\sigma) \approx 0,954 \quad \text{sowie} \quad IP(|X-m|<3\sigma) \approx 0,997$$

andererseits gilt für die Summe $aX + bY$ zweier stochastisch unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen $X \sim N(m_1; \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(m_2; \sigma_2^2)$, dass

$$aX + bY \sim N(am_1+bm_2; a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

wiederum normalverteilt mit den aufgeführten Parametern ist.

Seien also $X \sim N(m_1; \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(0; 1)$ stochastisch unabhängig, dann ist $aX + Y \sim N(am_1; a^2\sigma_1^2+1)$ womit sich die Bandbreite von aX quadratisch in a auf die Lage der Quantile und damit auch auf Testniveaus auswirkt. Somit lassen sich Testniveaus in ihrer Wirkung allein von wenigen gewichtigen Merkmalen abhängig determinieren.

Die Konstruktion von Teststatistiken und deren Annahmen werden selbst zumeist eher unkritisch für Prüfzwecke verwendet.

Ein Weg der exakteren Beurteilung von Verteilungen und ihren Entwicklungen gegenüber der parametrischen Betrachtung mittels Momenten wie Mittelwerten und Streuungen und deren Entwicklungen ist mit Vergrößerungen über Quantile gegeben, die beliebig bis hin zur Verteilung selbst verfeinert betrachtet werden können.

• **Marktskalen**

Zu einzelnen Kennzahlen lassen sich sogenannte Marktskalen betrachten, die die Einordnung beispielsweise der Regionen mittels deren Ranges für alle Regionen vergrößert darstellen.

Führen wir uns beispielhalber die Marktskala der Bruttoinlandsprodukte 2002 von 96 der mit dem Regionen-Ranking betrachteten Regionen vor Augen:

Marktskala:

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Bruttoinlandsprodukt in T€ pro Einwohner	19,3	22,7	25,3	26,7	29,3	31,5	36,6	40,8	48,2	74

Die angegebenen **Skalen-Werte** sind die α -Quantile (hier Perzentile) zu den überschriebenen (interpolierten) sogenannten **Quantilsrängen** $\alpha=10\%, 20\%, \dots, 100\%$. D.h. im Beispiel, 10% der betrachteten Städte weisen Bruttoinlandsprodukte bis zu einer Höhe von 19,3 T€ auf, 80% Bruttoinlandsprodukte von nicht mehr als 40,8 T€ und die Region mit dem höchsten Bruttoinlandsprodukt im betrachteten Jahr weist einen Betrag von 74 T€ auf.

⁷ Vgl. etwa W. König: "Taschenbuch der Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik", Harri Deutsch 2003, S. 931 oder M. Fis: "Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989, S. 180

Die Darstellung über Marktskalen dient dazu, abweichend von den häufig zu findenden Informationen mittels Durchschnittswerten eine detailliertere Information über die Verteilung der Kennzahlwerte in Bezug auf die betrachteten Regionen zu geben. So können wir der analogen **Skala der Veränderungen** auch anschaulich über deren Nullpunkt eine **Marktdynamik** entnehmen.

• **Marktdynamik**

Zur Orientierung wird in der Dynamik-Skala der Skalen-Nullpunkt unterlegt dargestellt.

Marktdynamik:

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Beispielskala	-9,2	-5,4	-2,9	-1,1	1,9	2,9	3,6	4,2	4,9	13,4

Im Beispiel weisen mehr Regionen eine positive als eine negative Veränderung in der betrachteten Kennzahl auf. Etwa 40-50% zeigen negative Veränderungen, während 50-60% der Regionen positive Veränderungen aufweisen. Dabei sind die positiven und die negativen Veränderungen im Beispiel annähernd vergleichbar stark ausgeprägt. Die folgenden evolutorischen Charaktere interpretieren sowohl die Skalenwerte als auch deren Dynamik im Sinne spezieller Verteilungsveränderungen von Kennzahlwerten.

• **Evolutorische Charaktere**

Unter **Evolution** verstehen wir eine „fortschreitende Entwicklung“ von beispielsweise Arten, Gesellschaften, Wirtschaftszweigen, Controlling-Segmenten und Ähnlichem (auch als **Systeme** bezeichnet). Über die Veränderung der Verteilung von Kennzahlen bzw. Merkmalen der Organismen, der Individuen, der Unternehmen oder beispielsweise der Kundengruppen (auch als (System-) **Objekte** bezeichnet), lassen sich dann Aussagen über die Art der Evolution bzw. der fortschreitenden Entwicklung machen.

Im allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, dass betrachtete Objekte sich in ihren Veränderungen - auch nicht nur in Bezug auf die Richtung der Veränderung - einheitlich verhalten. Andererseits können Veränderungen nur als tragfähig bzw. als Entwicklungen angesehen werden, wenn sie von einer ausreichenden Anzahl betrachteter Objekte gestützt oder wie hier vorgewiesen werden. Wir unterteilen daher zur Messung eines „konsensualen“ Potentials von Entwicklungen die Skalen in einen **unteren Bereich** bis zum 33%-Quantil, in einen **zentralen Bereich** vom 33%- bis zum 67%-Quantil und in einen **oberen Bereich** ab dem 67%-Quantil und nennen **Marktdynamiken**:

- **reaktionär**, wenn der Nullpunkt im oberen Skalenbereich liegt,
- **normal**, wenn der Nullpunkt im zentralen Skalenbereich liegt und
- **inflationär**, wenn der Nullpunkt im unteren Skalenbereich liegt.

So sind überwiegende **Richtungen der Veränderungen** verbal beschrieben. Die Wirkung der Veränderungen auf die Marktniveaus ist damit jedoch keinesfalls gegeben und Bedarf einer weiteren Formalisierung, wie sie in der Abbildung Evolutorische Skalencharaktere skizziert ist. Wir nennen daher weiter die Entwicklung der **Marktskalen** selbst, wobei wir uns in der Betrachtung auf eine gegebene Zeitspanne beziehen:

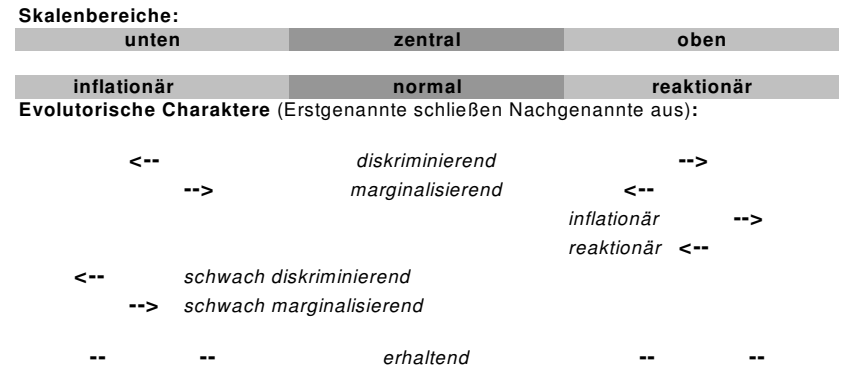
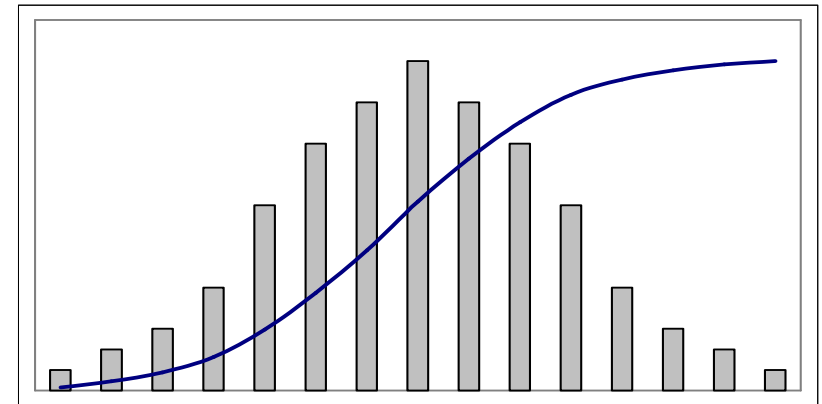


Abbildung: Evolutorische Skalen-Charaktere

- **diskriminierend**, wenn die zugehörige Dynamik normal ist und der untere und der obere Skalenbereich der Marktskala auseinander driften;
- **marginalisierend**, wenn die zugehörige Dynamik normal ist und der untere und der obere Skalenbereich der Marktskala sich zum normalen Skalenbereich zu bewegen;
- **inflationär**, wenn die zugehörige Dynamik inflationär ist und der obere Skalenbereich sich weiter entwickelt;
- **reaktionär**, wenn die zugehörige Dynamik reaktionär ist und der obere Skalenbereich sich zurück entwickelt;
- **schwach diskriminierend**, wenn die zugehörige Dynamik reaktionär ist und der untere Skalenbereich sich weiter zurück entwickelt und die Marktskala nicht reaktionär ist;
- **schwach marginalisierend**, wenn die zugehörige Dynamik inflationär ist und der untere Skalenbereich sich weiter entwickelt und die Marktskala nicht inflationär ist.

Wir sprechen von **Entwicklungen zur Intensität I**, wenn sich die Entwicklungen durch mittlere relative Veränderungen des Betrages I messen lassen. Ferner nennen wir eine Marktskala

- **erhaltend entwickelt**, wenn die zugehörige Dynamik normal ist und die Skalenbereiche sich nicht in einer der oben genannten Weisen entwickeln.

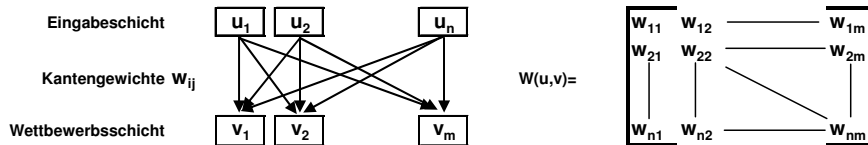
Wir sprechen genauer von einer **erhaltenden Entwicklung zum Niveau I**, wenn sich die Veränderungen der Skalenbereiche nur als Veränderungen kleiner dem Betrag I zeigen.

Mögliche technische Formalisierungen insbesondere der Intensitäten und des Niveaus sind mit dem Technik-Anhang des Großstädte-Rankings 2001⁸ und auch mit dem Dokument Manual.pdf der Begleit-CD sowie der Web-Seite <http://www.rankingweb.de/Downloads.html> gegeben und für das weitere Verständnis hier nicht unbedingt notwendig. Intensitäten und Niveaus sind aber allgemein unabhängig von der Veränderung der Skalendurchschnitte definiert, womit insbesondere für die Entwicklungen inflationär, schwach marginalisierend, reaktionär und schwach diskriminierend die relativen Veränderungen der **Marktdurchschnitte als Bezugsgröße für die Intensitäten** betrachtet werden sollten.

Wegen des irreführenden Wortlautes sind erhaltende Charaktere mit Niveaus über 100% nicht dargestellt, wie auch insgesamt nur Intensitäten bis zum Wert von 100% gemessen werden.

• Mehrdimensionalität

Leisten die Marktskalen mit den formalisierten evolutorischen Charakteren bereits eine Verallgemeinerung durch Zusammenfassung und/oder Vergrößerung, so kann dies angemessen insbesondere für die Berücksichtigung sowohl der Anzahl der Daten wie auch der Lage dieser mehrdimensional mittels Clusterungen geschehen und wobei der vom Autor mit der Begleit-Software vertretene sogenannte Fuzzy-C-Means Cluster-Algorithmus verschiedene weitere Vorteile mit sich bringt, die mit den Dateien Software.pdf und Manual.pdf ausgeführt sind. Folgend soll aber doch das Klassifikationsproblem auch anhand eines speziellen sogenannten neuronalen Netzes gelöst werden.



Zur Lösung von Klassifikationsproblemen können Netze mit einer Wettbewerbschicht herangezogen werden, wie dies im Beispiel oben für n Eingabeknoten, zur Aufnahme von Merkmalen von Daten und m Wettbewerbsknoten für die eigentliche Klassifikation dargestellt ist.

⁸ Vgl. R. Holz: "Großstädte-Ranking 2001", Shaker-Verlag 2002

Wird dem Netz ein Eingabevektor u präsentiert, wird anhand der Ausgabeaktivierung v mit $u^T W = v$ entschieden welchem Wettbewerbsknoten das Eingabemuster (primär) zugeordnet wird. Dies kann beispielsweise über die Funktion $\max(v_1, v_2, \dots, v_m)$ geschehen und was wie man leicht einsieht identisch mit dem Problem der Minimierung des Abstandes $\|u - w_j\|$ über alle Spaltenvektoren $w_j, j=1..m$, ist⁹.

Das Lernen von geeigneten Gewichten eines Netzes unterscheidet man grundsätzlich in überwachtes und unüberwachtes Lernen. Beim überwachten Lernen ist die richtige Ausgabe des Netzes bekannt, so dass anhand einer Fehlerminimierung die geeigneten Gewichte ermittelt werden können.

Beim unüberwachten Lernen fehlt die Information einer Vergleichsausgabe, weshalb das Erlernen der Gewichtsmatrix W aus Strukturserwartungen heraus erfolgt und wobei sich für Klassifikationsprobleme Ähnlichkeitsmaße anbieten.

Ein übliches Verfahren stellt die wiederholte Darbietung von Trainingsdaten in Epochen mit abnehmender Lernrate $\sigma \in (0,1)$ beispielsweise wie folgt dar¹⁰:

$$w_{j,\text{neu}} = \frac{w_{j,\text{alt}} + \sigma(u - w_{j,\text{alt}})}{\|w_{j,\text{alt}} + \sigma(u - w_{j,\text{alt}})\|} = \frac{\sigma=0,5 \quad w_{j,\text{alt}} + u}{\|w_{j,\text{alt}} + u\|}$$

D.h. entsprechend der Lernrate der Trainingsepoche werden die Gewichte sukzessive in die Richtung des gesehenen Eingabevektors verschoben, mit $\sigma=0,5$ wird als geeigneter Startlernrate so der Winkel zwischen den Spaltenvektoren der Gewichtsmatrix und dem Eingabevektor gerade halbiert. Die Normierung über die Norm soll geometrische Vergleichbarkeit gewährleisten, die zunächst eine andere Bedeutung als die Normierung von Merkmalsvektoren für deren Vergleichbarkeit in der Addition von Abständen beispielsweise in der Fuzzy-C-Means Clusterung¹¹ hat.

Initialisieren wir die Gewichtsmatrix mit der Einheitsmatrix $W_{3 \times 3} = I_{3 \times 3}$ und betrachten wir Trainingsdaten:

u_1	1	0	2
u_2	1	1	2
u_3	0	1	1
u_4	0	0	1
Bandbreite:	1	1	1

so werden alle Eingabevektoren dem Ausgabeneuron v_3 zugeordnet, was aus der höheren numerischen Wertigkeit des Merkmals 3 der Eingabevektoren resultiert. Die Unterschiede in den übrigen Komponenten, werden von der höheren Wertigkeit des Merkmals 3 der Eingabevektoren in der Bedeutung vollkommen überdeckt.

⁹ Vgl etwa auch W.König: "Taschenbuch ..", S. 910.

¹⁰ Vgl etwa [Gutenschwager 01] S.351f oder ausführlicher [Kruse 94] 95f

¹¹ Vgl etwa die Ausführungen in <http://www.rankingweb.de/Manual.pdf>

Eingabe		Siegerneuron			
		Init	u_1, u_2, u_3, u_4	u_4, u_3, u_2, u_1	
		W			
u_1	W_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	3	3	
u_2			3	3	
u_3			3	2	
u_4			3	3	
u_1	W_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	1	3	
u_2			2	1	
u_3			1	1	
u_4			1	1	
			$\sigma=0,5:$	$\sigma=0,2:$	$\sigma=0,05:$
u_1	W_3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1	1	1
u_2			3	3	1
u_3			3	2	2
u_4			1	1	1

Erst wenn die initialisierende Gewichtsmatrix auch die übrigen Komponenten stärker gewichtet, werden - zumeist schon nach der ersten Lernepoche - die Eingabevektoren differenzierter erfasst. Die Lernrate stellt hierbei offensichtlich einen wesentlichen Faktor dar, wie aber auch die Reihenfolge der Darbietung.

Während die Vorabnormierung der Eingabevektoren eine Invarianz bezüglich skalarer Multiplikation aufzeigt, ergeben sich bei eher unüblicher Vorabnormierung der Design-Spaltenvektoren etwas andere aber nicht weniger vielfältige Ergebnisse.

Die Beispieldatei WettbewerbsLernen.xls unter <http://www rankingweb.de/Downloads.html> ermöglicht das darbieten der Trainingsdaten mit den angegebenen Initialisierungsmatrizen und mit unterschiedlichen Lernraten sowie auch Reihenfolgen.

Es zeigt sich, dass wesentlich der Unterschied von Wertigkeiten für Konvergenz Sorge trägt und weshalb die empirisch künstlich wirken könnende Normierung von Vektoren sowohl mittels der Euklid-Norm sowie auch linear Wert erhaltend ermöglicht ist um weitere Lösungen aufzeigen zu können.

• Rating

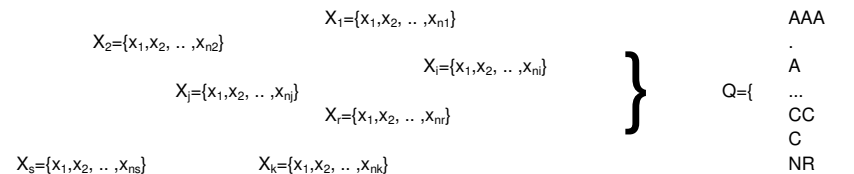
Ratings sind Einschätzungen im Allgemeinen von wirtschaftlichen Sachverhalten¹². Ratings sind üblicherweise im Sinne abgestufter Qualitäten vergleichbar.

Ratings werden weitestgehend auf Kennzahlssysteme gestützt, die erst wenn Anomalien im Sinne des zu Grunde gelegten Kennzahlensystems zu behandeln sind durch subjektive

¹² Vgl etwa C. Sönnichsen: "Rating-Systeme am Beispiel der Versicherungswirtschaft", Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswissenschaft an der Universität zu Köln, Heft 47, 1992.

Einzelentscheidungen ergänzt werden und sofern ein aussagekräftiges Kennzahlensystem erarbeitet ist¹³.

Es geht dann technisch darum, die durch k Mengen X_1, X_2, \dots, X_k gegebene Evidenz der Elemente von X_i , $i=1,2,\dots,k$, deren Anzahlen n_1, n_2, \dots, n_k sei (k beliebig), mit einer Qualitätsskala Q in Übereinstimmung zu bringen.



Die kombinatorisch maximal mögliche Grundmenge des Ereignisraums, das Kartesische Produkt,

$$X = X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_k = \otimes_{i=1..k} X_i$$

hat dann eine Gesamtausprägungsanzahl von $n := n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ und wobei wir o.B.d.A annehmen, dass ein Element der betrachteten Ereignismengen X_i jeweils ein 'blanc'-Element ist, um im Kartesischen Produkt auch die Potenzmenge über X, das heißt insbesondere alle auch nicht k-stelligen Tupel des betrachteten Universums zu erfassen.

Ein konkretes (einzelnes) Rating ist so eine Abbildung einer Teilmenge R aus X auf eine Qualitätsskala Q, die wir als beliebig aber fest vorgegeben annehmen und die wiederum o.B.d.A. immer auch die Qualität NR:= non rated enthalte. Damit lassen sich Rating-Techniken allgemein als Abbildungen

$$r: X \rightarrow Q$$

interpretieren und wobei Rating-Techniken über elementare Rating-Techniken

$$r_i: X_i \rightarrow Q_i$$

gewonnen werden können, so dass

$$r: \otimes_{i=1..k} r_i(X_i) \rightarrow Q$$

ist.

Die kommunikative Tiefe von Ratingberichten ist dann beispielsweise bei der einzigen deutschen Rating-Agentur für die Versicherungswirtschaft, der Assekurata GmbH Köln¹⁴, die nahmhaftige Vertreter aus Wissenschaft und Praxis zum Entscheidungsgremium zählt, neben

¹³ Für eine Gegenüberstellung von Rating-Ansätzen zur Versicherungswirtschaft der etablierten Rating-Agenturen vgl etwa S. Hirschmann, F.Romeike (Hrsg): "Rating von Versicherungsunternehmen", bank-verlag 2004.

¹⁴ Vgl etwa <http://www.assekurata.de>

dem Ratingbericht, durch Teilratings zu Sicherheit, Kundenorientierung, Erfolg und Wachstum und deren Gewichte für das Gesamtrating gegeben.

- **Solvabilitätsverordnung** SolvV vom 14.12.2006 (Verordnung über die angemessene Eigenmittelausstattung von Instituten, Institutsgruppen und Finanzholding-Gruppen vgl. <http://www.bafin.de>)

Mit Kapitel 3 Abschnitt 4 regelt die die Finanzaufsicht ausgestaltende SolvV für die **Anerkennung von Ratingagenturen** und Zuordnung von Bonitätsbeurteilungskategorien zu Bonitätsstufen mit den Paragraphen 52 bis 54 unter anderem:

§52(1)

"Eine Agentur wird für Risikogewichtungszwecke von der Bundesanstalt nur dann anerkannt, wenn die **Methodik zur Bonitätsbeurteilung**

- Objektivität,
- Unabhängigkeit,
- laufende Überprüfung und
- Transparenz

gewährleistet sowie die mit der Methodik erstellten Bonitätsbeurteilungen Zuverlässigkeit und Transparenz gewährleisten.."

§53 "Voraussetzungen für die Anerkennung von Ratingagenturen sind:

1. Die Methodik zur Vergabe von Bonitätsbeurteilungen muss **sorgfältig, systematisch und stetig** sein sowie einem Validierungsverfahren unterliegen, das **auf historischen Erfahrungswerten** beruht.

2. Die Methodik muss frei von äußeren politischen Einflüssen oder Zwängen sein und darf **keinerlei wirtschaftlichem Druck** ausgesetzt sein, der die Bonitätsbeurteilung beeinflussen könnte ..

4. Die Ratingagentur muss ihre Bonitätsbeurteilungen **laufend überprüfen** und bei Veränderungen der finanziellen Situation des Beurteilten anpassen; solche Überprüfungen müssen nach jedem Ereignis, das einen signifikanten Einfluss auf die Bonität des Beurteilten haben könnte, **mindestens jedoch einmal im Jahr**, stattfinden.

5. Vor einer Anerkennung muss die Ratingagentur nachweisen, dass für jedes Marktsegment eine den folgenden **Standards** entsprechende Beurteilungsmethodik etabliert ist:

- a. Ein Verfahren zum **Rückvergleich** muss seit mindestens einem Jahr durchgeführt werden.
- b. Die **Regelmäßigkeit** des Überprüfungsprozesses der Ratingagentur muss nachgewiesen werden.
- c. Die Ratingagentur erteilt der Bundesanstalt auf Verlangen Auskunft über das Ausmaß der **Kontakte der Ratingagentur zur Geschäftsleitung** der Firmen, für die sie eine Bonitätsbeurteilung abgibt.

6. Die Grundsätze der Methodik, welche die Ratingagentur bei der Erstellung ihrer Bonitätsbeurteilungen verwendet, müssen in einer Art und Weise öffentlich zugänglich sein, **dass alle potenziellen Nutzer deren Angemessenheit beurteilen können**.

7. Die Bonitätsbeurteilungen der Ratingagentur müssen am Markt als **glaubwürdig und verlässlich** angesehen und verbreitet sein; Kriterien hierfür sind insbesondere:

- a. der Marktanteil der Ratingagentur,
- b. die Herkunft und der Umfang der Einkünfte sowie die Vermögensverhältnisse der Ratingagentur,
- c. der Einfluss der Bonitätsbeurteilungen auf die Preisbildung im Markt und

- d. die Nutzung der Bonitätsbeurteilungen für die Ausgabe von Schuldverschreibungen und/oder die Bewertung von Kreditrisiken durch mindestens zwei Institute."

Die Solvabilität von nach Art der Lebensversicherung betriebenen Versicherungsunternehmen wird spezialgesetzlich über das Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) festgelegt durch verantwortliche Aktuarien überwacht.

• **Ratingverfahren**

Es lassen sich vier Ansätze der Ratingbildung unterscheiden, die wiederum unter Verwendung verschiedener Konsistenz-Bedingungen oder Normen mit Techniken unterstützt sein können und unter denen besonders die des Wahrscheinlichkeitskalküls gerne als eine Möglichkeit der Objektivierung herangezogen wird, die aber in Bezug auf die Übertragung empirischer Evidenz Nachteile mit sich bringt, wie noch ausgeführt wird.

Unabhängig von individuellen Präferenzen die aus den (verschiedenen) Perspektiven von Rating-Adressaten resultieren können, unterscheiden wir die folgenden Ratingverfahren:

- I. Die Wertorientierung der Finanzaufsicht als Beispiel für eine Bottom Up Bewertung
- II. Ratingverfahren i.e.S. als Top Down Beurteilung
- III. Rankingverfahren
- IV. Verfahren der sukzessiven Verbesserung

Zu I: Die Wertorientierung der Finanzaufsicht

Ein Kalkül der Finanzaufsicht ist die monetäre Bewertung einzelner Risiken von Finanzdienstleistern um zur Festlegung eines ausreichenden Eigenkapitals zu gelangen. Der Abgleich des vorhandenen mit dem notwendigen Eigenkapital dient dann als Aufsichtsinstrument.

Technisch sind hierbei **normierte Additionen** durchzuführen und wobei von Kompensationsregeln abstrahiert ist, denen die Aufsicht aber mit der Genehmigung individueller Risikomodelle Vorschub leistet.

Zu II: Ratingverfahren i.e.S.

Das genannte Verfahren der Finanzaufsicht wird als sogenanntes **Capital Adequacy Rating** auch von Rating-Agenturen verwendet, stellt aber kein Rating im engeren Sinn (i.e.S.) dar.

Unter einem Ratingverfahren im engeren Sinn wird das Verfahren der **Einordnung eines wirtschaftlichen Sachverhaltes** in eine gegebene Wertvorstellung, der Ratingskala, verstanden. Dies anhand gereifter Beurteilungssysteme, die im allgemeinen die individuelle Ergänzung subjektiver Evidenz zulassen.

Zu III: Rankingverfahren

Sowohl dem Ansatz I wie auch dem Ansatz II zuordbar, stellen Rankingverfahren eine Verallgemeinerung dieser dar, bei dem entweder aus Rangfolgen über einzelnen Ereignismengen mittels (**monotoner**) **Abbildungen** eine abschließende Rangfolge gebildet

wird oder aber ganzheitliche Entscheidungsalternativen vergleichend in eine Gesamtrangfolge gebracht werden. Rangfolgen können meßbare Abstände aufweisen.

Zu IV: Verfahren der sukzessiven Verbesserung

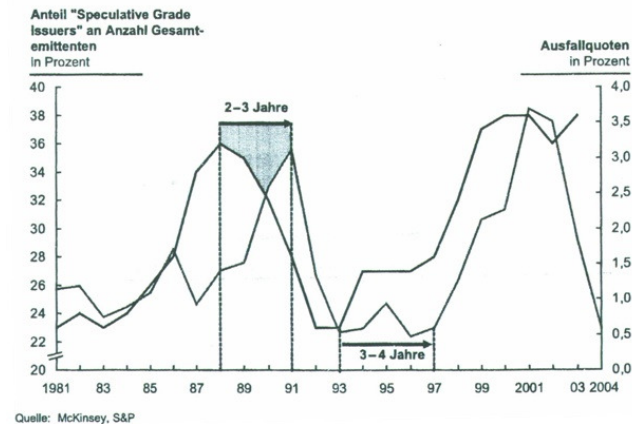
Abstrahieren Rankingverfahren mit Rangordnungen von absoluten Wertvorstellungen so abstrahieren Verfahren der sukzessiven Verbesserung zusätzlich von funktionalen Abbildungen indem letztendlich ein evidentes Optimum auf eine einzelne Qualität abgebildet wird bzw. ausgehend von einem Status Quo vergleichend eine einzelne Auswahlalternative als Entscheidung festgelegt wird.

Vom Autor mit dem Informationsportal <http://www.rankingweb.de/Ranking.html> unterstützte Verfahren sind über dargestellte Scorecards sowohl das Verfahren IV wie mit den gegebenen Empfehlungen und Rating-Techniken das Verfahren III. Rangangaben in den Scorecards unterstützen dann zusätzlich eine strukturierte sukzessive Verbesserung.

- **Rating-Techniken**

Rating-Techniken dienen mit der Anlehnung an Logik-Kalküle der Objektivierung.

QUALITÄT VON EMITTENTENRATINGS ALS FRÜHWARNINDIKATOR FÜR AUSFALLQUOTEN



Quelle: N.Adamus, T.Koch: „Bewertung von Banken“, 148

A. Das Wahrscheinlichkeitskalkül

Das bekannteste und Software-Technisch am besten unterstützte Logik-Kalkül ist nicht zuletzt wegen möglicher Rechenzeit freundlicher parametrischer Zugänge das Kalkül der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Objektivierung über Zählmaße hat zudem den Vorteil demokratische Züge zu tragen. Mit einem parametrischen Zugang zu Mengenverhältnissen wird aber eben der letztgenannte Vorteil vielfach ins Gegenteil gewendet, da die zur

Identifizierung von Verteilungen verwendeten Parameter in der Schätzung überwiegend stark auch von einer Überbetonung der Lage von Evidenz geprägt sind.

Das Wahrscheinlichkeitskalkül ist ausserdem, wie ähnlich aber auch allgemeinere Logik-Kalküle darauf angewiesen in der Aggregation von Evidenz entweder über Unabhängigkeits- bzw. beispielsweise mittels Copulas über spezielle Abhängigkeitsannahmen zu aggregieren oder aber sich auf spezielle Verteilungsannahmen zu stützen. Die statistische Testtheorie verweist dann ebenfalls auf mindestens eine nur im Zirkelschluss überprüfbare Annahme.¹⁵

B. Allgemeinere Logikkalküle

Soll Wissen allgemeiner aus Zusammenhängen heraus abgebildet werden, dann macht die Nachbildung des Wahrscheinlichkeitskalküls zumeist Kompromisse in der Modellbildung notwendig, die erzielte Ergebnisse deutlich angreifbar machen.

Mit Evidenz-Kalkülen wie beispielsweise der Fuzzy-Set Theorie¹⁶ sind hier Alternativen in der Modellbildung gegeben, die neben der Behandlung der Unschärfe-Probleme in der stochastischen Erkenntnisgewinnung insbesondere die Philosophie gegebener Wertvorstellungen der Ratingverfahren i.e.S. unterstützen.

Die als Idempotenz von Aggregations-Operatoren bekannte wesentliche Eigenschaft, dass eine Bewertung von Teileigenschaften, wenn diese bei allen Teileigenschaften gleich ist auch der Bewertung der Gesamtheit entsprechen soll, wird vom Wahrscheinlichkeitskalkül verletzt, während die dem Verfahren der Wertorientierung der Finanzaufsicht zugeordnete Technik der Addition normierter Werteinheiten in einen Spezialfall von allgemeinen Durchschnittsoperatoren¹⁷ überführbar ist, die besonders die Idempotenz erfüllen.

Die teilweise auch mit sogenannten Scoringverfahren berücksichtigte Eigenschaft der Idempotenz ist außerdem im Sinne der Transparenz von Bewertungen einfacher kommunizierbar, da unverzerrt einsichtig. Andererseits setzt eine mehr an sachgerechten Abbildungen orientierte Bewertungsphilosophie ein Vertrauen in Sachgerechtigkeit voraus, ohne die aber auch das Wahrscheinlichkeitskalkül beispielsweise mit Simulationsmodellen nicht auskommt.

C. Evidenz versa Wahrscheinlichkeit¹⁸

Sei U eine nichtleere Grundmenge mit $|U| < \infty$.

¹⁵ Vgl. etwa <http://www.rankingweb.de/Signifikanz.pdf> oder auch G.Buttler: „Statistisches getestet – Gütesiegel oder Etikettenschwindel?“, in W.Brachinger et.al. (Hrsg): „Wirtschaftsstatistik“, Vahlen 2006, 25-35.

¹⁶ Vgl. etwa G.J.Klir, B.Juan: "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic", Prentice Hall 1995 oder R.Holz: "Fuzzy Sets in der Tarifierung", Shaker 1996 sowie speziell zum Thema R.Holz: "Rating, Ranking, Scoring und Fuzzy Sets", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Heft 3, 4/1998, 363-384.

¹⁷ Vgl. ebenda R.Holz: "Rating, Ranking, ..."

¹⁸ Eine ausführlichere Publikation ist mit [Holz 07] gegeben, die für die Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik eingereicht ist und im Falle der nicht Annahme im Laufe des Jahres 2007 unter <http://www.rankingweb.de/Paper.html> verfügbar sein wird.

Die Beschränkung auf endliche Grundräume läßt es zu, daß wir uns im wesentlichen auf die Dempster-Shafer Theorie¹⁹ in ihrer ursprünglichen Form stützen können.

C.1 Definition:

Ein Trägermengensystem auf U ist ein Paar (\mathfrak{S}, m) , bestehend aus einem nichtleeren Mengensystem \mathfrak{S} von nichtleeren Untermengen in U und einer Mengenabbildung²⁰

$$m : \mathfrak{S} \rightarrow (0,1] \text{ mit } \sum_{A \in \mathfrak{S}} m(A) = 1$$

Wir nennen m Basiswahrscheinlichkeitszuordnung und (U, \mathfrak{S}, m) Basiswahrscheinlichkeitsraum²¹. Die Elemente von \mathfrak{S} nennen wir Focalmengen, \mathfrak{S} Focalmengensystem.

Im Gegensatz zu Wahrscheinlichkeitsmaßen auf 2^U ordnet m also einer Menge $A \in \mathfrak{S} \subseteq 2^U$ eine Bewertung zu, die nur für A selbst gilt und nicht - auch nicht teilweise - für Mengen, die in A enthalten sind bzw. in denen A enthalten ist, zutrifft.

Auf der Basis von Trägermengensystemen definieren Dempster und Shafer folgende verallgemeinerten Maße:

C.2 Definitionen:

Sei (U, \mathfrak{S}, m) ein Basiswahrscheinlichkeitsraum.

a) Als Plausibilitätsmaß bzgl. (U, \mathfrak{S}, m) bezeichnen wir die Mengenabbildung

$$Pl : 2^U \rightarrow [0,1] \text{ mit } Pl(B) := \sum_{A \in \mathfrak{S}: A \cap B \neq \emptyset} m(A).$$

b) Als Beliefmaß bzgl. (U, \mathfrak{S}, m) die Mengenabbildung

$$Bel : 2^U \rightarrow [0,1] \text{ mit } Bel(B) := \sum_{A \in \mathfrak{S}: A \subseteq B} m(A).$$

c) Die analogen Funktionen Pl bzw. Bel: $U \rightarrow [0,1]$ bezeichnen wir als Plausibilitäts- bzw. Belief-funktionen.

¹⁹Vgl. A.P. Dempster: "Upper and Lower probabilities induced by a multivalued mapping", Ann. Math. Stat. 38, 1967, 325-339 und G. Shafer: "A mathematical theory of evidence", Princeton 1976.

²⁰Teilweise (vgl. etwa [Shafer 76]) wird m auch auf 2^U , der Potenzmenge von U, definiert. Man setzt dann $m(A)=0$ für die Nicht-Focalmengen A.

²¹Die Bezeichnungen Basiswahrscheinlichkeitszuordnung und Basiswahrscheinlichkeitsraum sind insofern irreführend als (U, \mathfrak{S}, m) nur in Ausnahmefällen zu einem Maßraum erweitert werden kann. Die im Englischen übliche Bezeichnung 'body of evidence' für (\mathfrak{S}, m) ist die treffendere.

C.3 Bemerkungen²²

1. Ist (\mathfrak{S}, m) ein Trägermengensystem auf U und enthält \mathfrak{S} nur Einpunktmengen $\{u\}$, $u \in U$, so gilt

$$Pl(B) = Bel(B) = IP(B) = \sum_{u \in B} m(\{u\}), B \in 2^U.$$

D.h. IP ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf 2^U . Wir sprechen in diesem Zusammenhang bzgl. (\mathfrak{S}, m) auch von stochastischer Evidenz.

2. Besteht \mathfrak{S} aus einer aufsteigenden Mengenfolge $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n, n \in \mathbb{N}$, dann beschreibt $\mu(u) := Pl(\{u\}), u \in U$, einerseits die Zugehörigkeitsfunktion einer normalen unscharfen Menge (auch: normaler fuzzy set) und andererseits gilt

$$\begin{aligned} Bel(A \cap B) &= \min(Bel(A), Bel(B)), \\ Pl(A \cup B) &= \max(Pl(A), Pl(B)), \end{aligned} \quad A, B \subseteq U.$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Möglichkeit* μ und dem *Möglichkeitsmaß* Pl. Das duale Beliefmaß wird dann auch *Notwendigkeitsmaß* und (\mathfrak{S}, m) *konsonantisches Trägermengensystem* genannt.

Ein wesentliches Element der Dempster-Shafer Theorie ist die Kombinationsregel. Sie ermöglicht einerseits die Aggregation von Wissen und begründet andererseits ein spezielles Lernen, das wir auch als Updating bezeichnen.

C.4 Kombinationsregel nach Dempster-Shafer

Seien Pl_1 und Pl_2 zwei Plausibilitätsmaße bzgl. (U, \mathfrak{S}_1, m_1) und (U, \mathfrak{S}_2, m_2) .

Weiter gelte

$$K := \sum_{\substack{A \in \mathfrak{S}_1, B \in \mathfrak{S}_2: \\ A \cap B \neq \emptyset}} m_1(A)m_2(B) > 0.$$

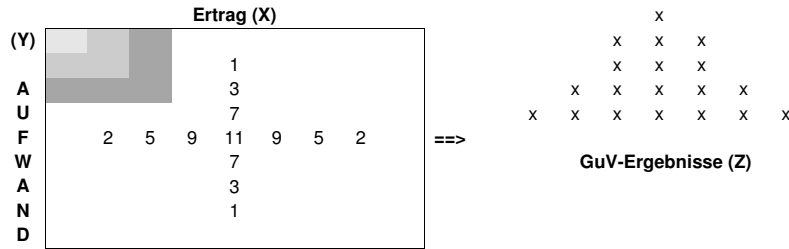
Dann ist (U, \mathfrak{S}, m) mit $\mathfrak{S} = \{C \subseteq U : C = A \cap B, C \neq \emptyset, A \in \mathfrak{S}_1, B \in \mathfrak{S}_2\}$ und $m : \mathfrak{S} \rightarrow (0,1]$,

$$m(C) := K^{-1} \sum_{\substack{A \in \mathfrak{S}_1, B \in \mathfrak{S}_2: \\ A \cap B = C}} m_1(A)m_2(B),$$

ein Basiswahrscheinlichkeitsraum, der wiederum ein Plausibilitätsmaß über 2^U festlegt.

²² Vgl. R.Holz: "Fuzzy Sets in der Tarifierung", 45.

• **Zusammenhang von Evidenzkalkülen**



Mit $X \otimes Y = Z$ finden Focalmengensysteme über $X \otimes Z$ und $Y \otimes Z$ Schnitte in Z , so daß die Kombinationsregel von Dempster-Shafer für stochastische Evidenz mit der empirischen Festlegung

$$\mathbb{P}(Z = z | X = x) := \frac{|X=x|_{Z=z}}{|X|}, \quad (\text{P1})$$

die sich nicht auf die Gemeinsame Verteilung von Z und X sondern auf die Verhältnisse von X stützt, allgemein wie folgt gegeben ist²³:

• **Dempster-Shafer Kombination für stochastische Evidenz**

$$\mathbb{P}(X \otimes Y = z) = \frac{\mathbb{P}(z|X) \oplus \mathbb{P}(z|Y)}{\sum_z \mathbb{P}(z|X) \oplus \mathbb{P}(z|Y)}, \quad (1)$$

im klassischen Fall entspricht \oplus der Multiplikation.

Eine weitere Möglichkeit in der empirischen Festlegung der Evidenz ist dann mit

$$\mathbb{P}(Z = z | X = x) := \frac{|Z=z|_{X=x}}{|Z|} \quad (\text{P2})$$

gegeben. Im klassischen Fall der multiplikativen Kombination führen (P1) und (P2) offensichtlich zur gleichen Kombination.

• **Allgemeine wahrscheinlichkeitstheoretische Kombination**

Die allgemeine wahrscheinlichkeitstheoretische Kombination

²³ Vgl auch R. Holz: " Fuzzy Sets in der Tarifierung", Shaker 1996, S.102ff

$$\mathbb{P}(X \otimes Y = z) = \sum_x \mathbb{P}(X \otimes Y = z | X) \mathbb{P}(X = x) = \sum_x \mathbb{P}(Y \otimes x = z, X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X \otimes y = z, Y = y) \quad (2)$$

setzt quasi die Kenntnis der gemeinsamen Verteilung voraus, da in der Berechnung jeweils auf (Rechteck-) Schichten zugegriffen wird die sich bei gegebener stochastischer Unabhängigkeit unmittelbar aus den Randverteilungen ergeben.

• **Wahrscheinlichkeitstheoretische Kombination stochastisch unabhängiger Verteilungen**

$$\mathbb{P}(X \otimes Y = z) = \frac{\sum_{x,y: x \otimes y = z} \mathbb{P}(X = x) \oplus \mathbb{P}(Y = y)}{\sum_z \sum_{x,y: x \otimes y = z} \mathbb{P}(X = x) \oplus \mathbb{P}(Y = y)}, \quad (3)$$

Die im Fall der Multiplikation gegebene Kombination des Wahrscheinlichkeitskalküls bei gegebener stochastischer Unabhängigkeit, konstruiert den Nenner zum Korrekturfaktor 1, da eine Verteilung summiert wird.

Im Fall der Addition wirkt sich schon das Vorgehen der Summation über X oder über Y auf das Ergebnis aus, da

$$\text{A. } \mathbb{P}(X \otimes Y = z) = \frac{\sum_x \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(Y \otimes x = z)}{\sum_z \sum_x \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(Y \otimes x = z)} = \frac{1 + \sum_x \mathbb{P}(Y \otimes x = z)}{\sum_z (1 + \sum_x \mathbb{P}(Y \otimes x = z))},$$

im allgemeinen ungleich

$$\text{B. } \mathbb{P}(X \otimes Y = z) = \frac{\sum_y \mathbb{P}(Y = y) + \mathbb{P}(X \otimes y = z)}{\sum_z \sum_y \mathbb{P}(Y = y) + \mathbb{P}(X \otimes y = z)} = \frac{1 + \sum_y \mathbb{P}(X \otimes y = z)}{\sum_z (1 + \sum_y \mathbb{P}(X \otimes y = z))},$$

ist. Während die wahrscheinlichkeitstheoretische Kombination von Evidenz also die Fortschreibung zu einer Verteilung auf dem Kartesischen Produkt verlangt, stützen sich Evidenzkalküle - ausschließlich das real vorhandene Wissen nutzend - lediglich auf die evidente Relation $R \subset X \otimes Y$ der Ränder und wozu in X, Y auch ein 'blanc'-Element aufgenommen sei.

Darüber hinaus gehen Evidenzkalküle auch mit weniger strukturierter nicht wahrscheinlichkeitstheoretischer Evidenz um.

C.5 Bemerkung:

Stichprobentupel (x,y) tragen drei mehr oder weniger voneinander unabhängige Informationen, den Beitrag für die beiden Randverteilungen sowie den Beitrag für die gemeinsame Verteilung aus dem gemeinsamen vorkommen von x und y . Letztere

Information stellt die in Anbetracht der gegenüber den Randverteilungen quadratischen Zahl der Möglichkeiten stärker dem Zufallsrisiko ausgelieferte dar.

Neben der pauschalen Annahme stochastischer Unabhängigkeit stehen wie erwähnt sogenannte Copulas als Modelle von Abhängigkeiten im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne zur Verfügung²⁴, darüber hinaus stellen sogenannte T-Normen, T-Conormen und Durchschnitts-Operatoren allgemeinere Aggregationsoperatoren dar²⁵, die nur in Spezialfällen dem Wahrscheinlichkeits-Kalkül folgen.

Ist die gemeinsame Verteilung bekannt, bietet sich es sich an mit eben der empirischen gemeinsamen Verteilung zu argumentieren oder aber mit einer aus Clusterungen gewonnenen mittelnden Vergrößerung. Die parametrische Anpassung von Daten an Copulas oder allgemeinere Aggregationen ist dem genannten größeren Zufallsrisiko ausgesetzt.

D. Ratingsysteme

Ratingsysteme entsprechend der Verordnung über die angemessene Eigenmittelausstattung von Instituten, Institutgruppen und Finanzholding-Gruppen, (SolV vom 14.12.2006 vgl. <http://www.bafin.de>) sind wie folgt reglementiert:

§ 107 SolV "Ratingsysteme"

(1) Nutzt das Institut mehrere Ratingsysteme, muss die Zuordnung eines Schuldners oder eines Geschäfts zu einem der Ratingsysteme das Risiko angemessen widerspiegeln; dies ist **zu dokumentieren**.

(2) Die **Zuordnungskriterien und -verfahren sind in regelmäßigen Abständen zu überprüfen**, um festzustellen, ob sie für das aktuelle Portfolio und die aktuellen äußeren Bedingungen weiterhin geeignet sind.

§ 118 SolV "Verwendung von mathematisch-statistischen Verfahren in Ratingsystemen"

Wenn das Institut statistische Modelle oder andere algorithmische Verfahren einsetzt, um IRBA-Positionen (Interne Rating basierte Ansätze) zu Ratingstufen für Schuldner oder für Geschäfte oder zu Risikopools zuzuordnen, dann sind folgende Vorgaben einzuhalten:

1. Das Institut muss der Bundesanstalt gegenüber nachweisen, dass das Modell eine gute Vorhersagekraft besitzt und dass die risikogewichteten IRBA-Positionswerte und die erwarteten Verlustbeträge durch die Verwendung des Modells nicht verzerrt werden. Die Eingangsvariablen des Modells müssen eine angemessene und leistungsfähige Grundlage für die resultierenden Prognosen darstellen. Das Modell darf **keine wesentlichen systematischen Fehler** beinhalten.

2. Das Institut muss über ein Verfahren verfügen, um Dateneingaben in das Modell zu überprüfen. Das Verfahren muss eine Beurteilung der **Genauigkeit**, der **Vollständigkeit** und der **Zweckdienlichkeit** der Daten umfassen.

3. Das Institut muss nachweisen, dass die zur Entwicklung des Modells verwendeten Daten für die Gesamtheit der gegenwärtigen Schuldner oder IRBA-Positionen des Instituts **repräsentativ** sind.

²⁴ Vgl etwa. R.B. Nelsen: An Introduction to Copulas, Lecture Notes in Statistics 139, Springer 1999. oder D. Pfeifer, J. Neslehova: „Modelling Dependence in Finance and Insurance: the Copula Approach, Blätter der DGVM, Heft 2/2003, 177-191.

²⁵ Vgl etwa R. Holz: „Rating, Ranking, Scoring und Fuzzy Sets ..“, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Heft 3/1998, 363-384.

4. Das Institut muss über einen **regelmäßigen Turnus zur Modellvalidierung** verfügen, der die Überwachung der Leistungsfähigkeit und Stabilität des Modells, eine Überprüfung der Modellspezifikation und die Überprüfung der Modellergebnisse anhand der realisierten Ergebnisse einschließt.

5. Das Institut muss das statistische Modell durch individuelle Beurteilungen und Kontrollen ergänzen, um die modellbasierten Zuordnungen zu überprüfen und um sicherzustellen, dass das Modell in angemessener Weise genutzt wird. Die Überprüfungsverfahren müssen darauf gerichtet sein, **die mit Modellschwächen verbundenen Fehler aufzudecken und zu begrenzen**. Individuelle Beurteilungen müssen alle relevanten Informationen berücksichtigen, die nicht vom Modell erfasst werden. Das Institut muss festlegen und dokumentieren, wie individuelle Beurteilung und Modellergebnisse miteinander zu kombinieren sind.

§ 119 SolV "Dokumentation von Ratingsystemen"

(1) Das Institut muss den Aufbau des Ratingsystems und die Einzelheiten seiner Funktionsweise dokumentieren. Die Dokumentation muss darüber Aufschluss geben, inwieweit die Mindestanforderungen für die Anwendung des IRBA und die Eignungsanforderungen für Ratingsysteme erfüllt sind und muss Ausführungen insbesondere zu

1. der Portfolioabgrenzung,
2. den Risikoeinstufungsmerkmalen,
3. den Verantwortlichkeiten derjenigen Stellen, welche die Risikoeinstufung der Schuldner und IRBA-Positionen durchführen,
4. den Abständen, in denen Überprüfungen von Zuordnungen erfolgen, und
5. der Beaufsichtigung des Risikoeinstufungsprozesses durch die Geschäftsleitung beinhalten.

(2) Das Institut muss das Prinzip für die Auswahl der Risikoeinstufungsmerkmale und Analysen, die diese Auswahl stützen, dokumentieren. Das Institut muss **alle größeren Veränderungen im Risikoeinstufungsprozess dokumentieren**. Diese Dokumentationen müssen die Identifizierung der Änderungen ermöglichen, die seit der letzten Überprüfung durch die Bundesanstalt am Risikoeinstufungsprozess vorgenommen wurden. Außerdem muss die Organisation der Zuordnung der Risikoeinstufungen einschließlich des Prozesses zur Zuordnung von Risikoeinstufungen und der zugehörigen internen Steuerungs- und Überwachungsstruktur dokumentiert werden.

(3) Das Institut muss die intern verwendeten spezifischen **Definitionen für Ausfall und Verlust dokumentieren** und die Konsistenz zu den in dieser Verordnung festgesetzten Definitionen nachweisen.

(4) Wenn das Institut im Rahmen des Risikoeinstufungsverfahrens statistische Modelle benutzt, muss es deren **zugrunde liegende Methodik dokumentieren**. Diese Dokumentationen müssen im Wesentlichen

1. eine detaillierte Darlegung der Theorie, der Annahmen sowie der mathematischen und empirischen Basis für die Zuordnung von Schätzwerten zu Ratingstufen, zu einzelnen Schuldnern, zu IRBA-Positionen oder zu Risikopools sowie der zur Modellschätzung verwendeten Datenquellen geben,
2. ein fundiert statistisches Verfahren zur Validierung des Modells festsetzen, einschließlich Tests der Leistungsfähigkeit außerhalb des Beobachtungszeitraums und außerhalb der Entwicklungsstichprobe, und
3. alle Umstände aufzeigen, unter denen das Modell unzureichend funktioniert.

(5) Die Verwendung eines von einem **externen Anbieter** bezogenen Modells, das proprietäre Technologie enthält, rechtfertigt keine Ausnahme von den Dokumentationsanforderungen oder von irgendeiner der anderen der Anforderungen an Ratingsysteme. Das Institut bleibt für die Erfüllung dieser Anforderungen verantwortlich.

Und weiter mit **Teil 3: Operationales Risiko, Modellrahmen**

§ 284 Güte des Messsystems

(1) Fortgeschrittene Messansätze müssen

- interne Schadensdaten,
- externe Daten,
- Szenario-Analysen sowie
- institutsspezifische Geschäftsumfeld- und interne Kontrollfaktoren

zur Berechnung des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko verwenden. Ein Institut muss diese vier Elemente in seinem fortgeschrittenen Messansatz angemessen kombinieren und dies dokumentieren. Insbesondere ist sicherzustellen, dass bei der Kombination dieser Elemente Mehrfachzählungen von qualitativen Beurteilungen oder Risikominderungen vermieden werden.

(2) Der mit einem fortgeschrittenen Messansatz ermittelte Anrechnungsbetrag für das operationelle Risiko muss den **erwarteten und unerwarteten Verlust** umfassen. Sofern das Institut den erwarteten Verlust angemessen bestimmt und nachweist, dass es einen Teil des erwarteten Verlustes in seinen internen Geschäftspraktiken angemessen berücksichtigt, wird die Bundesanstalt die Reduktion des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko um diesen Teil des erwarteten Verlustes zulassen.

(3) Der fortgeschrittene Messansatz muss die **Haupttreiber des operationellen Risikos**, welche die Form der Ränder der Verlustverteilungen beeinflussen, erfassen. Der Anrechnungsbetrag für das operationelle Risiko muss insbesondere potenziell schwerwiegende Verlustereignisse am Rande der Verlustverteilung abdecken und hinsichtlich seiner Solidität mit einem 99,9-prozentigen Konfidenzniveau bei einer einjährigen Halteperiode vergleichbar sein.

(4) Das Institut muss angemessene Verfahren bei der Entwicklung eines Modells zur **Messung seiner operationellen Risiken** und zur Überprüfung dieses Modells anwenden. Die Überprüfungsprozesse, -verfahren und -ergebnisse sind zu dokumentieren.

§ 285 Korrelationen

Einzel ermittelte Risikomessgrößen für operationelle Risiken dürfen bei der Berechnung des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko addiert werden. Werden dagegen bei der Berechnung des Anrechnungsbetrags Korrelationen zwischen einzelnen ermittelten Risikomessgrößen berücksichtigt, müssen folgende Anforderungen erfüllt sein:

1. Sämtliche Korrelationsannahmen bei der Bestimmung des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko müssen plausibel sein und begründet werden.
2. **Die Systeme zur Bestimmung der Korrelationen müssen zuverlässig sein sowie Unsicherheiten berücksichtigen.**

Das Institut muss seine Korrelationsannahmen mit quantitativen und qualitativen Verfahren überprüfen und bei Bedarf anpassen.

§ 289 Externe Daten

(1) Bei der Bestimmung des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko **müssen relevante externe Daten verwendet werden**. Dabei dürfen nur Daten verwendet werden, die nicht personenbezogen oder, soweit personenbezogen, anonymisiert sind.

(2) Ein Institut muss in einem systematischen Prozess solche Situationen bestimmen, in denen externe Daten genutzt werden, sowie Methoden festlegen, wie diese Daten in das Messsystem einbezogen werden. Die **Bedingungen und Verfahren zur Nutzung externer Daten müssen dokumentiert, bei Bedarf angepasst und regelmäßig von einer unabhängigen Stelle überprüft werden**.

Szenario-Analysen, Geschäftsumfeld und internes Kontrollsystem

§ 290 Szenario-Analysen

Bei der Bestimmung des Anrechnungsbetrags für das operationelle Risiko **müssen Szenario-Analysen verwendet werden, die auf Expertenmeinungen und externen Daten basieren**, um Gefährdungen durch schwerwiegende Risikoereignisse zu beurteilen. Im Zeitablauf muss das Institut die Ergebnisse dieser Szenario-Analysen überprüfen und diese im Hinblick auf aktuelle Verlusterfahrungen anpassen, um ihre **Plausibilität sicherzustellen**.

Als wesentliche Elemente der Risikoüberwachung und auch Beurteilung sind also eine angemessene Vollständigkeit der berücksichtigten Einflüsse, die Dokumentation und Variation sowie die Regelmäßigkeit der Überwachung zur Gewährleistung von Objektivität vorgesehen und Dokumentation sowie Begrenzung von Unsicherheit gefordert.

Betrachten wir zur weiteren Einschätzung des Regelungswillens folgend ein übliches mathematisch technisches Vorgehen:

• Markt(index)modelle²⁶

Es seien:

R_i : die Ein-Periodenrendite des Investments $i, i=1, \dots, n$

$R_{MI} = \sum_i c_i R_i$ mit $\sum_i c_i = 1$ und $c_i \in [0; 1]$ der Marktindex sowie

$E(\varepsilon_i) = 0$; $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ und $\text{Cov}(\varepsilon_i, R_{MI}) = 0$, dann errechnen sich die Koeffizienten alpha und beta des Regressionsmodells $R_i = \alpha + \beta R_{MI} + \varepsilon_i, i=1, \dots, n$

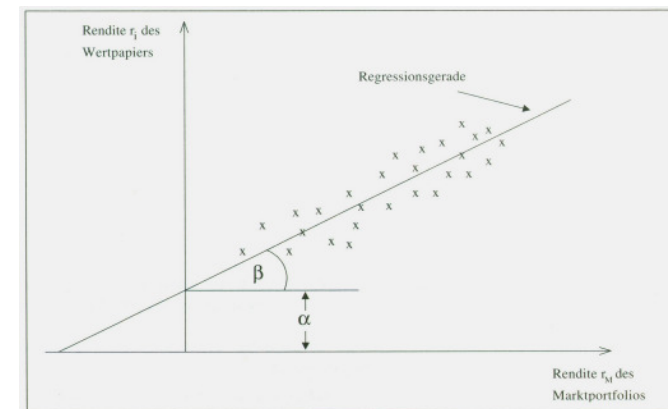


Abb. 6.21: Regressionsmodell zur Erklärung individueller Wertpapierrenditen

wobei ε_i den nicht durch die Regressionsgerade erklärten Fehler beschreibt, der wegen $\text{Cov}(\varepsilon_i, R_{MI}) = 0$ keinen systematischen Zusammenhang zum Marktindex mehr aufweist und in der Verteilung zentriert auf die Erwartung 0 mit der Varianz σ_i^2 betrachtet sei, was Annahmen über eine Homogenität des Marktes impliziert, aus der Ermittlung der

²⁶ Vgl. P.Albrecht, R.Maurer: "Investment- und Risikomanagement", Schäffer-Poeschel Stuttgart, 2.Aufl. 2005, Kapitel 6.4

Parameter alpha und beta als kleinste Fehler-Quadrate-Schätzer und was zusätzlich Gewichtungen dieser impliziert, zu

$$\alpha_i = E(R_i) - \beta_i E(R_{MI}) \text{ und}$$

$$\beta_i = P(R_i, R_{MI})\sigma(R_i) / \sigma(R_{MI}) = \text{systematisches Risiko von } R_i / \text{Marktrisiko}$$

P der Korrelationskoeffizient und was den Einfluss der gemessenen Korrelation auf das Modell direkt sichtbar macht.

Darüber hinaus werden in Modellen in denen beispielsweise zwei Marktindizes etwa als Aktienindex R_{AI} und Rentenindex R_{RI} berücksichtigt werden teilweise zur Berücksichtigung einer Abhängigkeit dieser für einen höheren Modellfit auch Modelldesigns der Art

$$R_i = \alpha_i + \beta_{1i}R_{AI} + \beta_{2i}R_{RI} + \beta_{3i}R_{AI}R_{RI} + \epsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

verwendet, was dann zusätzlich den verzerrenden Effekt der Multiplikation auf die Bedeutung der Lage einzelner Daten verstärkt.

E. Mitigation

Unter den modernen Managementgrundsätze nach Puschmann²⁷:

- Benchmarking
- SWOT (**S**trengths, **W**eaknesses, **O**pportunities, **T**hreats) -Analyse
- Change Mangement
- Portfolio Management
- Business Reengineering
- Shareholder Value
- Balanced Scorecard
- Lean Management
- Total Quality Management
- Customer Relationship Management

fallen das Benchmarking, die SWOT-Analyse, der Shareholder Value, die Balanced Scorecard, das Total Quality Management sowie das Customer Relationship Management als Grundsätze auf, die per se auch eine Orientierung an der Unternehmensumwelt vorsehen.

Die SWOT-Analyse weist dabei parallelen zu den aus der Philosophie der Balanced Scorecard abgeleiteten Blickrichtungen auf Organisation auf.

²⁷ Vgl. K-H. Puschmann: „Praxis ..“, 37f

Umfeld Unternehmen	Risiken (threats)	Chancen (opportunities)
Stärken (strengths)	Stärken zur Abwehr von Risiken einsetzen	Stärken zur Wahrnehmung von Chancen nutzen
Schwächen (weaknesses)	Schwächen abbauen oder Rückzug	Schwächen abbauen um Chancen wahrzunehmen

Abbildung: „SWOT-Analyse“²⁸

• Mitigation Plans

Im Riskmanagement dienen sogenannte Mitigation Plans der Risikobewältigung.

Der klassische versicherungstechnische Mitigation Plan ist der Ausgleich im Kollektiv, der sich auf relativen Varianzreduktionen in wachsenden Kollektiven stützt. Dem Ausgleich über die Zeit sind andererseits auch die gesetzlichen Regelungen zur Bildung von Schwankungsrückstellungen und Bausparfonds angelehnt.

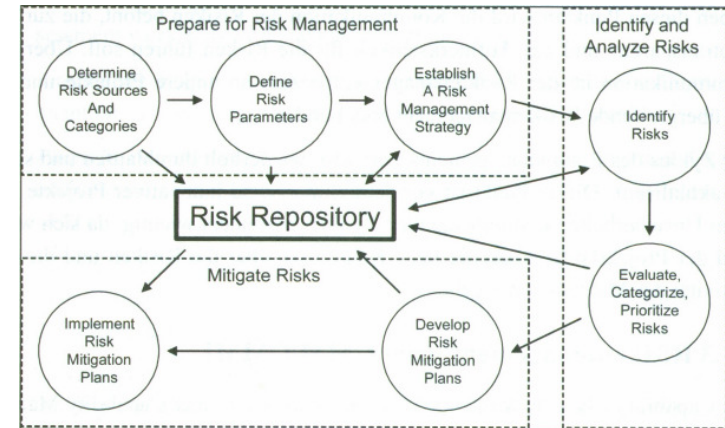


Abbildung: Risk-Repository nach Wallmüller²⁹

Rückversicherung, die (Ver-)teilung von Risiken auf weitere Risikoträger, als ein weiterer Mitigation Plan berücksichtigt beispielsweise mit Jahresüberschadenversicherungen, auch Stop Loss Versicherungen genannt, ganzheitliche Politiken die über die Zeit auch mit Finanzierungsplänen verbunden sein können, dies mit einem Kostenaufschlag weitgehend angelehnt an die Planung und das Risikoverständnis der versicherten Unternehmen.

²⁸ Vgl. K-H. Puschmann: „Praxis des Versicherungsmarketings“, 44f

²⁹ C.Wolff, M.Holtrup: "Risikomanagement bei Innovationsprojekten", in J.Littkemann (Hrsg.): "Innovationscontrolling", Reihe Betriebswirtschaft, Verlag Vahlen 2005, 285-330, hier aus E.Wallmüller: "Risikomanagement für IT- und Softwareprojekte", München, Wien 2004, 93.

Andererseits erfüllen auch sogenannte Franchisen (Selbstbehalte) den Tatbestand von Mitigation Plans im Risikomanagement von Risiken übernehmenden Gesellschaften.

• **Mitigation als Bewertungsphilosophie**

Aus Sicht der Problematik der Bewertung mit Ratings und Evaluationen findet Mitigation eine weitere Bedeutung, die besonders auch den Einsatz von Evidenztechniken im Vergleich zu Wahrscheinlichkeitskalkülen notwendig macht.

Ratings von wirtschaftlichen Sachverhalten rechtfertigen monetäre Einheiten als Bewertungsmaßstäbe und weshalb professionelle Rating-Agenturen auch in Anspruch nehmen auf eine komparative Bewertung verzichten zu können.

Wie der Abschnitt 2.5 „Kommunale Koordination“ aufzeigt ist eine Stützung allein auf monetäre Einheiten in Bewertungssituationen von Evaluationen nicht immer möglich und öfters nicht sinnvoll.

Aufgrund des fehlenden objektiven Maßstabes ist eine komparative Bewertung dann das notwendige Instrument der Objektivierung.

Die Abbildungen „Information in Relation“ unten zeigen elementare Informationslagen auf, die beispielsweise mit dem Produkt dem Kalkül der stochastischen Unabhängigkeit entsprechen und mit der (Ent-)Nestung auch Olap-Techniken aufnehmen.

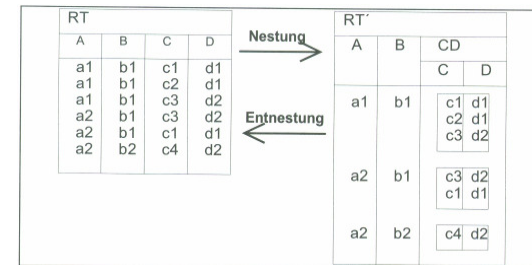
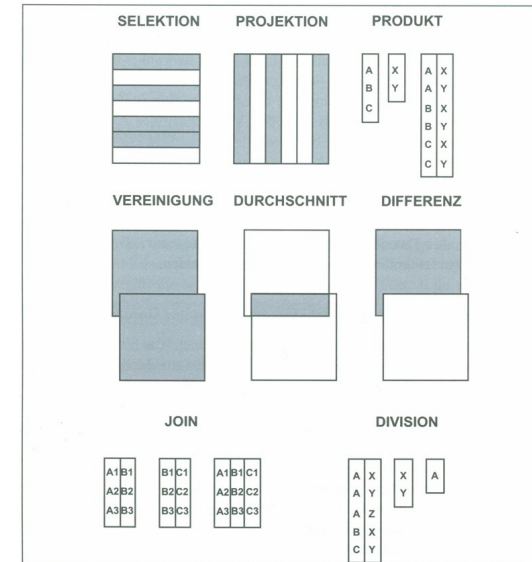
Informationsreduktionen sind in der Selektion und der Projektion in zweifacher Hinsicht ähnlich dem Bewertungsproblem der Evaluation gegeben. Einerseits wird zumeist aus der Erfahrung einer nicht notwendig statistisch repräsentativen Selektion heraus bewertet und andererseits, wenn statistisch repräsentativ, notwendig stark abstrahiert.

Mit einem Resümee-Paper der Fakultät für Sozialwissenschaften der Ruhr-Uni-Bochum³⁰ lesen wir als Fazit zum Thema Evaluationsforschung:

„Je weniger Vorwissen über einen Forschungsgegenstand vorhanden ist, je weniger sich die zu untersuchenden Sachverhalte bereits stabilisiert haben, je komplexer der zu analysierende Gegenstandsbereich ist, desto weniger ist das für die Surveyforschung entwickelte Standardmodell empirischen Vorgehens anwendbar..

In diesen Fällen sollte sich schon das Forschungsdesign an der Varianzmaximierung orientieren: Der Forscher soll möglichst eine weite Vielfalt für alle relevanten Dimensionen des Designs schaffen (Voraussetzung für valide Resultate). D.h. er verwendet verschiedene Auswertungs- und Analyseansätze, nutzt die Vielfalt der in das Forschungsprojekt aktiv eingebundener Personen, verwendet unterschiedliche Instrumente und Datenquellen (Verschiedenen Erhebungszeitpunkte, Orte, Situationstypen, Personengruppen)“

³⁰ Gefunden über <http://www.google.de> zum Stichwort Evaluationsforschung.



Abbildungen: "Information in Relation"³¹

Mitigation kann so als angemessene Erweiterung der Erfahrung für komparative Bewertungen im Sinne eines Globalisierungsanspruches verstanden werden, für den das Wahrscheinlichkeitskalkül aufgrund der fehlenden Zufälligkeit des Vorgehens, weniger geeignet erscheint. Und wobei die alternative Ausrichtung an einer eher willkürlichen Benchmark, ebenfalls weniger angemessen wirkt.

Die Evidenztheorie bietet hier mit dem Kalkül des Approximativen Schließens einerseits sowie mit dem Fundus idempotenter Durchschnittsoperatoren andererseits bereits geeignete Lösungsansätze an³².

³¹ Vgl. J.Biethan et.al: „Ganzheitliches Informationsmanagement, Band II Entwicklungsmanagement“, Oldenburg 4.Auflage 2007, Seiten 60 und 82

³² Vgl. etwa R.Holz: „Fuzzy Sets in der Tarifierung“.. und R.Holz: „Rating, Ranking, Scoring und Fuzzy Sets“,..